Es. 1: Per il teo. di Lie, sappiamo che esiste $v \in V \setminus \{0\}$ autovett. comune a tutti gli elem. di $\varphi(L)$, dove $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ è la rappresentazione. (Oss.: $V \neq \{0\}$ perché è irriducibile.)
Allora $kv \subseteq V$ è un L-sottomodulo, da cui $V = kv$.

Es. 2: Si veda la soluzione sul sito del corso.

Es. 3: Dimostriamo che V non è completam. riducibile. Per assurdo, supp.

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t \qquad \text{con } V_i \text{ irriduc. } \forall i.$$

Scegliamo basi per ogni V_i e mettiamole insieme, ottenendo una base per V. Gli elem. di L in questa base sono della forma „diagonale a blocchi":

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & & & 0 \\ & \boxed{*} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{*} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \text{ base di } V_1 \\ \updownarrow \text{ base di } V_2 \\ \vdots \\ \updownarrow \text{ base di } V_t \end{array}$$

Per l'esercizio 2, ogni elem. di $Rad(L)$ agisce come uno scalare su ciascun V_i, quindi le matrici degli elem. di $Rad(L)$ sono scalari in ciascuno dei blocchi sulla diagonale. Segue che commutano con tutta L, cioè $Rad(L) \subseteq Z(L)$: assurdo.

Es. 4: Oss.:

$$e.x^p = 0 \qquad h.x^p = \underbrace{p}_{=0 \text{ in } k} x^p = 0 \qquad f.x^p = p \cdot x^{p-1} y = 0$$

$$e.y^p = p\, x\, y^{p-1} = 0 \qquad h.y^p = (-p)\, y^p = 0 \qquad f.y^p = 0$$

Quindi $W = k x^p + k y^p$ è un L-sottomodulo.

Oss.: $W = \text{span}\{(\text{pol. omog. di grado } 1)^p\}$ perché

$$(ax+by)^p = \sum_{i=0}^{p} \underbrace{\binom{p}{i}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ in } k \text{ se } 0<i<p}} (ax)^i (by)^{p-i} = (ax)^p + (by)^p.$$

Per $p=2$ V non è completam. riducibile, perché non esiste un sottom. U tale che $V = W \oplus U$. Sia infatti p. ass. $u \in U$ per un tale U, con $u \neq 0$. Allora

$u = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ con $\beta \neq 0$, allora

$e.u = \beta x^2$ deve appartenere a U, ma $\beta x^2 \in W$

quindi $\beta = 0$, assurdo.

Es. 5: Facciamo qualche conto con $\mathfrak{sl}(n) = L$ $\forall n$.

Scegliamo una base di L fatta così:

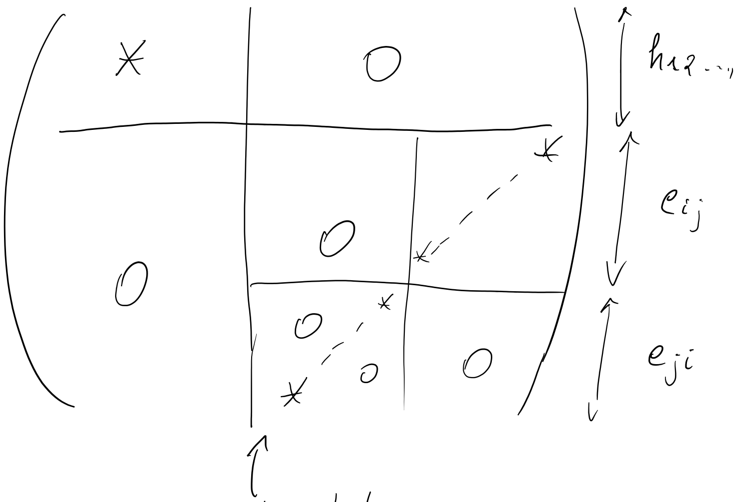
$$\Big(h_{12}, \dots, h_{n-1,n}, \underbrace{e_{12}, e_{13}, \dots}_{e_{ij} \text{ con } i<j}, \underbrace{\dots\dots, e_{31}, e_{21}}_{e_{ji} \text{ con } i<j, \text{ ordinati al contrario}}\Big)$$

dove $h_{ij} = e_{ii} - e_{jj}$.

Oss.: la prima parte della base $h_{12}, \dots, h_{n-1,n}$ è fatta da $n-1$ vettori, la seconda parte da $n(n-1)$ vettori.

Abb. già visto $\kappa_L(e_{ij}, e_{lr}) = 0$ se $i \neq j$ e $(l,r) \neq (j,i)$,

quindi la matr. di κ_L in questa base è



uniche entrate $\neq 0$ sono del tipo $\kappa_L(e_{ij}, e_{ji})$

Calcoliamo $\kappa_L(h_{ij}, h_{\ell r})$. Oss.:

$$ad(h_{\ell r})(e_{ab}) = [e_{\ell\ell}, e_{ab}] - [e_{rr}\, e_{ab}] = \delta_{\ell a}\, e_{\ell b} - \delta_{\ell b}\, e_{a\ell} - \delta_{ra}\, e_{rb} + \delta_{br}\, e_{ar} =$$

$$= (\delta_{\ell a} - \delta_{\ell b} - \delta_{ra} + \delta_{rb})\, e_{ab}$$

Quindi

$$ad(h_{ij})\, ad(h_{\ell r})(e_{ab}) = (\delta_{ia} - \delta_{ib} - \delta_{ja} + \delta_{jb}) \cdot (\delta_{\ell a} - \delta_{\ell b} - \delta_{ra} + \delta_{rb})\, e_{ab}$$

da cui $ad(h_{ij})\, ad(h_{\ell r})$ è diagonale sulla parte di base degli e_{ab} $(a \neq b)$ (ed è zero sulla parte di base degli h_{12}, h_{23}, ecc...).

Viene:

$$tr\left(ad(h_{i,i+1})\, ad(h_{\ell,\ell+1})\right) = \sum_{a \neq b} \underbrace{(\delta_{ia} - \delta_{ib} - \delta_{(i+1)a} + \delta_{(i+1)b})} (\delta_{\ell a} - \delta_{\ell b} - \delta_{(\ell+1)a} + \delta_{(\ell+1)b}) =$$

Se scambio a con b rimane uguale, quindi la traccia è

$$= 2\left(\sum_{a<b} (\text{—})(\text{—})\right)$$

Oss. i casi seguenti per $\delta_{ia}-\delta_{ib}-\delta_{(i+1)a}+\delta_{(i+1)b}$:

$$\left.\begin{matrix} i & i+1 \\ \shortparallel & \\ a & \end{matrix}\right\} = 1 \qquad \left.\begin{matrix} i & i+1 \\ \shortparallel & \shortparallel \\ a & b \end{matrix}\right\} = 2$$

$$\left.\begin{matrix} i & i+1 \\ & \shortparallel \\ & a \end{matrix}\right\} = -1 \qquad \left.\begin{matrix} i & i+1 \\ \shortparallel & \\ b & \end{matrix}\right\} = -1$$

$$\left.\begin{matrix} i & i+1 \\ & \shortparallel \\ & b \end{matrix}\right\} = 1$$

da cui, in $\mathfrak{sl}(3)$:

$$tr\left(ad(h_{12})\,ad(h_{12})\right) = 2\Big(\underset{a=1,\, b=2}{2 \cdot 2} + \underset{a=1\ b=3}{1 \cdot 1} + \underset{a=2,\, b=3}{(-1)\cdot(-1)}\Big) = 12$$

$$tr\left(ad(h_{23})\,ad(h_{23})\right) = 2\Big(\underset{a=1,\, b=2}{(-1)(-1)} + \underset{a=1\ b=3}{1 \cdot 1} + \underset{a=2\ b=3}{2 \cdot 2}\Big) = 12$$

$$tr\left(ad(h_{12})\,ad(h_{23})\right) = 2\cdot\Big(\underset{a=1\ b=2}{2\cdot(-1)} + \underset{a=1\ b=3}{(1)\cdot(1)} + \underset{a=2\ b=3}{(-1)\cdot(2)}\Big) = -6$$

Quindi la matrice di $\kappa_{\mathfrak{sl}(3)}$ è della forma

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & -6 & \\ -6 & 12 & 0 \\ \hline & & \begin{matrix} & & * \\ & 0 \; \iddots & \\ & \iddots \; 0 & \\ * & & \end{matrix} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

Rimane da calcolare $K_L(e_{ij}, e_{ji})$ con $i \neq j$, e usiamo:

$$ad(e_{ij})\, ad(e_{ji})(e_{lr}) =$$

$$= \delta_{il}\left(e_{ir} - \delta_{ri}\, e_{jj} \right) - \delta_{rj}\left(\delta_{jl}\, e_{ii} - e_{lj} \right)$$

Supp. $l \neq r$, cioè e_{lr} è nella seconda parte della base.

Abb. già visto che per contribuire alla traccia ci sono solo <u>due</u> possibilità: $e_{ir} = e_{lr}$ con $i = l$ (contributo $+1$), e

$e_{lj} = e_{lr}$ con $j = r$ (contributo $+1$).

Quindi questa parte della base contribuisce alla traccia con:

tanti $+1$ quanti sono gli r diversi da i (e pongo $l = i$)

——— , ——— l — , — j (e pongo $r = j$)

cioè il contributo è $2 \cdot (n-1)$.

Supp. ora $l = r$:

$$ad(e_{ij})\, ad(e_{ji})(e_{ll}) =$$

$$= \delta_{il}\left(e_{il} - \delta_{li}\, e_{jj} \right) - \delta_{lj}\left(\delta_{jl}\, e_{ii} - e_{lj} \right) =$$

$$= \delta_{il}\left(e_{ii} - e_{jj} \right) - \delta_{lj}\left(e_{ii} - e_{jj} \right) = \left(\delta_{il} - \delta_{lj} \right)\left(e_{ii} - e_{jj} \right)$$

Scriviamo $h_1 = h_{12}$, $h_2 = h_{23}$, ecc..., e abb.

$$ad(e_{ij})\, ad(e_{ji})(h_\ell) = \left(\delta_{i\ell} - \delta_{\ell j} - \delta_{i,\ell+1} + \delta_{\ell+1,j}\right)(e_{ii} - e_{jj})$$

Supp. $i<j$ e osserviamo che $e_{ii} - e_{jj} = h_{ij} = h_i + h_{i+1} + \dots + h_{j-1}$.

Se $j > i+1$ allora questo contribuisce alla traccia con:

$+1$ prendendo $\ell = i$ $\qquad$ $+0$ con tutti gli altri ℓ

$+1$ prendendo $\ell = j-1$

Se invece $j = i+1$, allora il contributo alla traccia è

$+1+1$ prendendo $\ell = i$ $\qquad$ $+0$ con tutti gli altri ℓ

Quindi $+2$ in ogni caso.

Segue: $K_L(e_{ij}, e_{ji}) = 2(n-1) + 2 = 2n - 2 + 2 = 2n$

La matr. di $K_{\mathfrak{sl}(3)}$ è:

$$\left(\begin{array}{cc|cccccc} 12 & -6 & & & 0 & & & \\ -6 & 12 & & & & & & \\ \hline & & & & & & & 6 \\ & & & 0 & & & 6 & \\ & 0 & & & & 6 & & \\ & & & & 6 & & & \\ & & & 6 & & & & \\ & & 6 & & & & 0 & \end{array}\right)$$

$$\det(K_L) = \underbrace{\left(12^2 - 6^2\right)} \cdot (-1)^5\, 6^6 = -\left(6^2 \cdot 2^2 - 6^2\right) 6^6 =$$

$$= -6^8\,(4-1) = -6^8 \cdot 3 = -3^9 \cdot 2^8$$

Es. 6: $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$ad(e) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad ad(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{\mathfrak{sl}(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{base duale} \quad \left(\frac{f}{4}, \frac{h}{8}, \frac{e}{4}\right)$$

Es. 7:

$$ad(e)\, ad\left(\frac{f}{4}\right) + ad(h)\, ad\left(\frac{h}{8}\right) + ad(f)\, ad\left(\frac{e}{4}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_3$$

Es. 8: Sia V_α autosp. di T di autoval. $\alpha \neq 0$, cioè

$T(v) = \alpha v \quad \forall v$, quindi $\quad v = T\left(\frac{1}{\alpha} \cdot v\right)$

Segue: $V_\alpha \subseteq \operatorname{Im}(T)$.

Decomp. $V = \underset{\overset{\shortparallel}{\ker(T)}}{V_0} \oplus V_{\alpha_1} \oplus \_ \oplus V_{\alpha_\ell}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ gli autoval. <u>non nulli</u> di T.

Dato $v = v_0 + v_{\alpha_1} + \dots + v_{\alpha_\ell}$ $(v_\alpha \in V_\alpha)$

abb. $T(v) = \alpha_1 v_1 + \_ + \alpha_\ell v_\ell$ da cui $\mathrm{Im}(T) \subseteq V_{\alpha_1} \oplus \_ \oplus V_{\alpha_t}$.

Segue: $\mathrm{Im}(T) = V_{\alpha_1} \oplus \_ \oplus V_{\alpha_t}$, e $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

(Si può anche vedere come caso part. del lemma prima della decomp. di Fitting, con $m = 1$).

<u>Es. 9:</u> Sia $\Sigma \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ lo sp. vett. generato dagli endom. S_i.

Ogni elem. di Σ commuta con ogni altro elem. di Σ.

Dim. che gli elem. di Σ si diagonalizzano tutti simultaneam. per indūz. su $\dim(\Sigma)$.

Se $\dim(\Sigma) = 0$ allora $\Sigma = \{0\}$ ed è chiaro.

Sia ora $\dim(\Sigma) \geq 1$, $\Sigma' \subseteq \Sigma$ sottosp. vett. di codim. 1, e sia $\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma'$. Decomp.

$$V = V_{\alpha_1} \oplus \_ \oplus V_{\alpha_\ell}$$

in autosp. per σ, $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell =$ <u>tutti</u> gli autoval. di σ.

Dato $\tau \in \Sigma'$, abb. $\tau(V_{\alpha_i}) \subseteq V_{\alpha_i}$ (conto già visto a lezione: se $\sigma(v) = \alpha_i v$ allora $\sigma(\tau(\alpha_i)) = \tau(\sigma(v)) = \tau(\alpha_i v) = \alpha_i \tau(v)$).

Quindi gli elem. di Σ' si restringono tutti a endom. di V_{α_i}, e anche queste restriz. sono diagonalizzabili (es. 4 foglio 6). Per induzione, esiste una base di V_{α_i} fatta di tutti autovett. degli elem. di Σ'. Mettendo insieme queste basi per ogni i, otteniamo una base di V fatta di autovett. per ogni elem. di Σ' e anche per σ.

Segue facilm. che sono autovett. per tutti gli elem. di Σ:

$$\big(\underset{\in k}{a}\,\sigma + \underset{\in \Sigma'}{\tau}\big)(v) = a\underbrace{\sigma(v)}_{=\alpha_i v} + \underbrace{\tau(v)}_{=\beta v} = a\,\alpha_i v + \beta v = (a\alpha_i + \beta)v$$